Université Abdelmalek Essaadi
Faculté des Sciences et Techniques
Tanger

Année 2008-2009
Module M111
MIPC

CC2
(durée 2h)

Exercice 1

IR^3 étant muni de la base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, où $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$
On considère l'application $f : IR^3 \to IR^3$ définie par :

$$f(x, y, z) = (x, 1/2\ x + 1/2\ y - 1/2\ z,\ 1/2\ x - 1/2\ y + 1/2\ z)$$

1°) Montrer que f est linéaire.
2°) Calculer la matrice de f dans la base B.
3°) Déterminer une base B_1 de ker f.
4°) En déduire le rang de f.
5°) On considère l'application linéaire $g = f - id_{IR}^3$, déterminer une base B_2 de ker g.
6°) Montrer que $IR^3 = \ker f \oplus \ker g$.
7°) On pose $B_0 = B_1 \cup B_2$ montrer que B_0 est une base de IR^3.
8°) Ecrire la matrice de passage P de B à B_0.
9°) Calculer P^{-1}.
10°) Calculer la matrice de f relativement à la base B_0.

Exercice 2

Soient m et a deux paramètres réels. On considère le système linéaire

$$(S_{m,a}) \begin{cases} mx - 2y + z = 1 \\ -2x + y + mz = a \\ x + my - 2z = 1 \end{cases}$$

1°) Pour quelles valeurs de m, $(S_{m,a})$ est-il de Cramer.
2°) Discuter suivant les valeurs de m le rang du système $(S_{m,a})$.
3°) Résoudre le système $(S_{0,1})$ (m = 0 et a = 1) par la méthode des déterminants.
4°) Résoudre le système $(S_{1,a})$.Discuter suivant la valeur du paramètre.

ETUSUP .com

Institut la centrale — Algebre 1

Exercice 2 — 08-09

1°/ $\Delta = \begin{vmatrix} m & -2 & 1 \\ -2 & 1 & m \\ 1 & m & -2 \end{vmatrix} = m(2-m^2)+2(4-m)+(-2m-1) = -m^3-6m+7$

$= (m-1)(-m^2-m-7)$

le discriminant du trinôme $-m^2-m-7$ est $(-1)^2-4(-1)(-7) = -27 < 0$

donc $\forall m \in \mathbb{R}$ $-m^2-m-7 \neq 0$

le système $(S_{m,a})$ est de Cramer si $\Delta \neq 0$ càd si $m \neq 1$

2°/ 1°cas : si $m \neq 1$ alors $rg\, S_{m,a} = 3$

2°cas : si $m = 1$ alors $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

$\Rightarrow rg\, S_{1,a} = 2$

3°/ $m = 0$: , $a = 1$ $\begin{cases} -2y+z = 1 \\ -2x+y = 1 \\ x-2z = 1 \end{cases}$ $\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -7$

$\Delta y = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -7$ $\Delta z = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -7$, $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = +7$

$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = -1$, $y = \frac{\Delta y}{\Delta} = -1$ $z = \frac{\Delta z}{\Delta} = -1$

4°/ $m = 1$; $\begin{cases} x-2y+z = 1 \\ -2x+y+z = a \\ x+y-2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} E_1 \\ 2E_1+E_2 \\ E_1-E_3 \end{matrix} \begin{cases} x-2y+z = 1 \\ -3y+3z = 2+a \\ -3y+3z = 0 \end{cases}$

1°cas si $2+a \neq 0$ càd $a \neq -2$ alors les 2 equations (2) et (3) sont incompatible donc $S = \emptyset$

2°cas si $2+a = 0$ càd $a = -2$ alors le système devient

$\begin{cases} x-2y+z = 1 \\ y = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+y \\ z = y \end{cases} \Rightarrow S = \{(1+y, y, y) \,/\, y \in \mathbb{R}\}$

ETUSUP .com

Institut Lacentrale CC2 08-09 Algèbre 1

ETUSUP .com

Exercice 1 $f(x,y,z) = \left(x, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z, \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right)$

1°/ • $f((x,y,z)+(x',y',z')) = f(x+x', y+y', z+z') = \left(x+x', \frac{1}{2}(x+x') + \frac{1}{2}(y+y') - \frac{1}{2}(z+z'),\right.$
$\left., \frac{1}{2}(x+x') - \frac{1}{2}(y+y') + \frac{1}{2}(z+z')\right) = \left(x, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z, \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right) + \left(x', \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}z', \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}y' + \frac{1}{2}z'\right)$
$= f(x,y,z) + f(x',y',z')$

• $\alpha \in \mathbb{R}$; $f(\alpha(x,y,z)) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = \left(\alpha x, \frac{1}{2}(\alpha x) + \frac{1}{2}(\alpha y) - \frac{1}{2}(\alpha z),\right.$
$\left., \frac{1}{2}(\alpha x) - \frac{1}{2}(\alpha y) + \frac{1}{2}(\alpha z)\right) = \alpha\left(x, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z, \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right) = \alpha f(x,y,z)$

2°/ $f(e_1) = f(1,0,0) = (1, 1/2, 1/2)$
$f(e_2) = f(0,1,0) = (0, 1/2, -\frac{1}{2})$
$f(e_2) = f(0,0,1) = (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
$\Rightarrow A = M(f,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

3°/ $(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1/2\,x + 1/2\,y - 1/2\,z = 0 \\ 1/2\,x - 1/2\,y + 1/2\,z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases} \Rightarrow (x,y,z) = (0,y,y) = y(0,1,1)$

donc $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(u(0,1,1))$ d'où $B_1 = \{u(0,1,1)\}$

4°/ $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f \Rightarrow 3 = 1 + \operatorname{rg} f \Rightarrow \operatorname{rg} f = 2$

5°/ Soit $(x,y,z) \in \operatorname{Ker} g$ alors $g(x,y,z) = 0$ càd $f(x,y,z) - (x,y,z) = (0,0,0)$

$\begin{cases} 0 = 0 \\ 1/2\,x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 0 \\ 1/2\,x - 1/2\,y - 1/2\,z = 0 \end{cases} \Rightarrow x - y - z = 0 \Rightarrow x = y + z$

d'où $(x,y,z) = (y+z, y, z) = y(1,1,0) + z(1,0,1)$
d'où $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Vect}(v(1,1,0), w(1,0,1)) \Rightarrow B_2 = \{v(1,1,0), w(1,0,1)\}$

6°/ • On a $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$
• Reste à montrer que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g = \{(0,0,0)\}$

Soit $(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$ alors $(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f$ et $(x,y,z) \in \operatorname{Ker} g$

càd $f(x,y,z) = (0,0,0)$ et $g(x,y,z) = (0,0,0)$

Or $g(x,y,z) = f(x,y,z) - (x,y,z)$

d'où $0 = 0 - (x,y,z) \Rightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$

7°/ Soit α, β, γ elements de $\mathbb{R}$ / $\alpha u + \beta v + \gamma w = (0,0,0)$

càd $\alpha(0,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,0,1) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1)-(2) \Rightarrow \\ (3) \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} \gamma - \alpha = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases} \overset{\text{Somme}}{\Rightarrow} 2\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0$$

d'où $\beta = 0$ et $\alpha = 0$

la famille B_0 est libre

Or $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \text{card } B_0 \Rightarrow B_0$ est 1 base de $\mathbb{R}^3$

8°/ $P = M(B \to B_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9°/ $\det P = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$

$\text{Cof } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

10°/ $N = M(f, B_0) = P^{-1} . A P = \begin{pmatrix} -1/2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ETUSUP .com

ETUSUP.com

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Exercices
Livres
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Divers
Multimedia
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..